Компетентность / Competency (Russia) 4/2022
DOI: 10.24412/1993-8780-2022-4-16-21

Плотность распределения вероятности производной случайного процесса

Предлагается процедура получения функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) производной дифференцируемого стационарного (или псевдостационарного) случайного процесса при известной одномерной ФПРВ данного процесса. Показано, что предлагаемая процедура с точностью до коэффициента пропорциональности совпадает с квантово-механическим переходом от координатного к импульсному представлению состояния элементарной частицы

М.С. Батанов[1]
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ), канд. техн. наук

В.П. Монахова[2]
Институт № 2 «Авиационные, ракетные двигатели и энергетические установки» МАИ (НИУ), канд. техн. наук

М.О. Ромашова[3]
МАИ (НИУ), 79651082719@ya.ru

[1] доцент кафедры № 207, Москва Россия
[2] директор, Москва, Россия
[3] ассистент кафедры № 207, Москва, Россия

Для цитирования: Батанов М.С., Монахова В.П., Ромашова М.О. Плотность распределения вероятности производной случайного процесса // Компетентность / Competency (Russia). — 2022. — № 4. DOI: 10.24412/1993-8780-2022-4-16-21

ключевые слова

стационарный дифференцируемый случайный процесс, производная случайного процесса, постоянная Планка, шероховатость поверхности

Определение способа нахождения функции плотности распределения вероятности производной дифференцируемого случайного процесса при известной одномерной ФПРВ данного процесса является ключом к решению ряда задач статической физики и стохастической квантовой механики.

Например, предложенный в этой статье способ получения ФПРВ производной случайного процесса (см. выражения (34)–(37)) позволяет обосновать квантово-механическую процедуру перехода от координатного представления состояния элементарной частицы к ее импульсному представлению (см. выражения (42)–(43)). При этом данный результат получен на основании исследования свойств случайного процесса, то есть без привлечения феноменологической гипотезы Луи де Бройля о существовании волн материи.

Это становится возможным в силу того, что импульс частицы линейно связан с производной ее координаты по времени. Например, x-составляющая вектора импульса частицы, движущейся в направлении оси X со скоростью v_x, задается выражением

$$p_x = mv_x = m\,\partial x / \partial t = mx'. \qquad (1)$$

Предложенное авторами решение проблемы получения ФПРВ производной случайного процесса при известной одномерной ФПРВ высот неровностей того же процесса позволяет рекомендовать дополнительные методы исследования свойства и характеристик случайных процессов, например шероховатых поверхностей.

Рассмотрим несколько реализаций случайного процесса $\xi(t)$, показанных на рис. 1. Данные реализации можно интерпретировать, например, как изменения со временем t проекции места нахождения блуждающей частицы на ось ξ или как сечения однородной и изотропной шероховатой поверхности (в этом случае параметр t играет роль расстояния, то есть $t = r$).

В общем случае рассматриваемый случайный процесс нестационарный, но будем исходить из того, что все усредненные характеристики этого процесса в сечении t_i незначительно отличаются от аналогичных усредненных характеристик в близлежащем сечении t_j.

То есть потребуем, чтобы все начальные и центральные моменты этого процесса в сечении t_i были приближенно равны соответствующим начальным и центральным моментам в сечении t_j при $t = t_j - t_i$, стремящемся к нулю. Например,

$$\overline{\xi(t_i)} \approx \overline{\xi(t_j)};\ \overline{\xi^2(t_i)} \approx \overline{\xi^2(t_j)};\ \ldots \text{ и т.д.} \qquad (2)$$

Другими словами, рассматриваемый случайный процесс $\xi(t)$ либо стационарный (в узком смысле), либо близок к нему. Однако в каждом сечении t_m все усредненные характеристики такого процесса остаются неизменными. Для удобства будем называть такой процесс «псевдостационарным случайным процессом» (ПССП).

Все выводы и заключения в отношении ПССП, сделанные в этой статье, относятся и к стационарному случайному процессу (ССП).

Отметим вначале общие свойства первой производной ПССП $\xi(t)$. Из реализаций на рис. 1 видно, что величины $\xi(t_k)$ в сечении t_k и производные этого процесса в том же сечении $\xi'(t_k) = \partial\xi(t_k)/\partial t$ являются независи-

DOI: 10.24412/1993-8780-2022-4-16-21

мыми, а следовательно, и некоррелированными, случайными величинами. Данное утверждение может быть выражено аналитически [1]:

$$< \xi\left(t_k\right)\xi'\left(t_k\right) > \; = \; < \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\xi\left(t_k\right)\right]^2 > \; = \\ = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} < \left[\xi\left(t_k\right)\right]^2 > = 0, \qquad (3)$$

где <...> означает усреднение по реализациям. Здесь учтено, что операции дифференцирования и усреднения в данном случае являются коммутативными и что все усредненные характеристики ПССП в каждом его сечении являются постоянными величинами, в том числе $<\left[\xi(t_k)\right]^2> = \text{const}$.

Однако даже при статистической независимости случайных величин $\xi(t_k) = \xi_k$ и $\xi'(t_k) = \xi_k'$ некая связь между ФПРВ $\rho(\xi_k)$ и ФПРВ $\rho(\xi_k')$ существует. Это вытекает из известной процедуры получения ФПРВ $\rho(\xi'_k)$ производной случайного процесса при известной двухмерной ФПРВ данного процесса [1, 2]:

$$\rho\left(\xi_i, \xi_j\right) = \rho\left(\xi_i, t_i;\, \xi_j, t_j\right). \qquad (4)$$

Для этого в выражении (4) необходимо сделать замену переменных

$$\xi_i = \xi_k - \frac{\tau}{2}\xi_k';\; \xi_j = \xi_k + \frac{\tau}{2}\xi_k'; \\ t_i = t_k - \frac{\tau}{2};\; t_j = t_k + \frac{\tau}{2}, \qquad (5)$$

где $\tau = t_j - t_i;\; t_k = (t_j - t_i)/2$ с якобианом преобразования $[J] = \tau$.

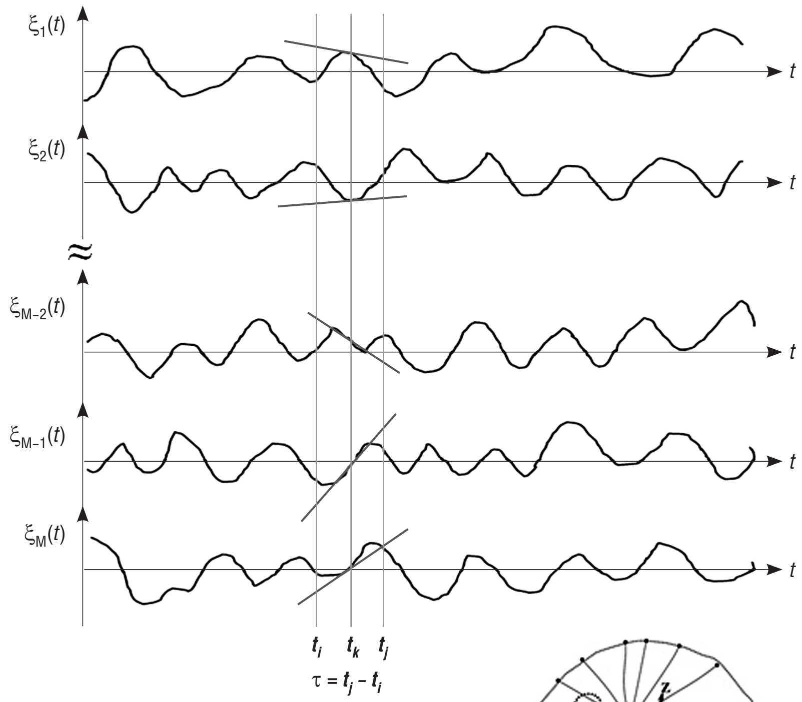
В результате из ФПРВ (4) получим [1, 2]

$$\rho_2(\xi_k, \xi_k') = \lim_{\tau\to 0}\rho_2 \times \\ \times\left(\xi_k - \frac{\tau}{2}\xi_k', t_k - \frac{\tau}{2};\; \xi_k + \frac{\tau}{2}\xi_k', t_k + \frac{\tau}{2}\right). \qquad (6)$$

Далее, интегрируя полученное выражение по ξ_k, найдем искомую ФПРВ производной исходного процесса в сечении t_k [1, 2]:

$$\rho\left(\xi_k'\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(\xi_k, \xi_k'\right)d\xi_k'. \qquad (7)$$

Формальная процедура (4–7) позволяет решить задачу определения ФПРВ $\rho(\xi')$ при известной двухмерной ФПРВ (4). Однако двухмерные ФПРВ определены для ограниченного класса случайных процессов. Поэтому необходимо рассмотреть возможность получения ФПРВ $\rho(\xi')$ при известной одномерной ФПРВ $\rho(\xi)$.



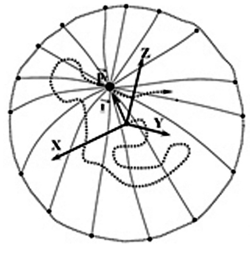


Рис. 1. Реализации дифференцируемого случайного процесса $\xi(t)$ [Implementations of a differentiable random process $\xi(t)$]

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими свойствами случайных процессов:

1. Двухмерная ФПРВ любого случайного процесса может быть представлена в виде [1, 2]

$$\rho\left(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j\right) = \\ = \rho\left(\xi_i, t_i\right)\rho\left((\xi_j, t_j)/(\xi_i, t_i)\right), \qquad (8)$$

где $\rho\left((\xi_j, t_j)/(\xi_i, t_i)\right)$ – условная ФПРВ.

2. Для ПССП справедливо приближенное тождество

$$\rho\left(\xi_i, t_i\right) \approx \rho\left(\xi_j, t_j\right). \qquad (9)$$

3. Условная ФПРВ случайного процесса при $\tau = t_i - t_j$, стремящейся к нулю, вырождается в дельта-функцию:

$$\lim_{\tau\to 0}\rho\left(\frac{\xi_j, t_j}{\xi_i, t_i}\right) = \delta\left(\xi_j - \xi_i\right). \qquad (10)$$

На основании перечисленных свойств препарируем случайный про-

Компетентность / Competency (Russia) 4/2022
DOI: 10.24412/1993-8780-2022-4-16-21

справка

Список сокращений и определений:

ПССП — псевдостационарный случайный процесс;

ССП — стационарный случайный процесс;

ФПРВ — функция плотности распределения вероятности;

ПАВ — плотность амплитуды вероятности;

Пико-частица — частица с характерными размерами ~ 10^{-8}–10^{-14} см

цесс на участке $[t_i = t_k - \tau/2;\ t_j = t_k + \tau/2]$ при $\tau \to 0$ посредством следующей формальной процедуры.

ФПРВ $\rho(\xi_i) = \rho(\xi_i, t_i)$ в сечении t_i и ФПРВ $\rho(\xi_j) = \rho(\xi_j, t_j)$ в сечении t_j всегда можно представить в виде произведения двух функций:

$$\rho(\xi_i) = \varphi(\xi_i)\varphi(\xi_i) = \varphi^2(\xi_i);$$
$$\rho(\xi_j) = \varphi(\xi_j)\varphi(\xi_j) = \varphi^2(\xi_j), \qquad (11)$$

где $\varphi(\xi_i)$, $\varphi(\xi_j)$ — плотность амплитуды вероятности (ПАВ) случайной величины ξ_i в сечении t_i и в сечении t_j соответственно.

Для ПССП справедливо приближенное выражение

$$\varphi(\xi_i) \approx \varphi(\xi_j), \qquad (12)$$

в чем легко убедиться, взяв квадратный корень от обеих частей (9).

Для ССП приближенное соотношение (12) становится равенством

$$\varphi(\xi_i) = \varphi(\xi_j). \qquad (12a)$$

Отметим, что приближенное выражение (12) при $\tau \to 0$ для большинства нестационарных случайных процессов (в том числе для ПССП) также превращается в равенство

$$\varphi(\xi_i,\ t_i) = \lim_{\tau\to 0}\varphi(\xi_j, t_j = t_i + \tau). \qquad (13)$$

При выполнении условия (12) выражение (8) может быть представлено в симметричном виде

$$\rho(\xi_i, \xi_j) \approx \varphi(\xi_j)\rho(\xi_j/\xi_i)\varphi(\xi_j), \qquad (14)$$

где $\rho(\xi_j/\xi_i)$ — условная ФПРВ.

Запишем выражение (14) в развернутом виде:

$$\rho\left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right] \approx \left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right]\times$$
$$\times\rho\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}; \xi_i, t_i = t_k + \frac{\tau}{2}\right]\times\varphi\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right]. \qquad (15)$$

Устремим в (15) τ к нулю, но таким образом, чтобы данный интервал равномерно слева и справа стягивался к параметру $t_k = (t_j - t_i)/2$, тогда с учетом (10) из (14) получим точное равенство:

$$\lim_{\tau\to 0}\rho(\xi_i, \xi_j) =$$
$$\lim_{\tau\to 0}\left\{\varphi(\xi_i)\rho(\xi_j/\xi_i)\varphi(\xi_j)\right\} = \qquad (16)$$
$$= \varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{jk} - \xi_{ik})\varphi(\xi_{jk}),$$

где ξ_{ik} — результат стремления случайной величины $\xi(t_i)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ слева; ξ_{jk} — результат стремления случайной величины $\xi(t_j)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ справа.

Проинтегрировав обе части выражения (16) по ξ_{ik} и ξ_{jk}, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{jk} - \xi_{ik})\varphi(\xi_{jk})\,d\xi_{ik}d\xi_{jk} = 1. \qquad (17)$$

Выражение (17) является формальным математическим тождеством из теории обобщенных функций, учитывающим свойства δ-функции. Для того чтобы наполнить выражение (17) физическим содержанием, необходимо задать конкретный вид δ-функции.

Определим вид δ-функции для марковского случайного процесса. Рассмотрим непрерывный случайный марковский процесс, для которого справедлива одна из записей сокращенного уравнения Фоккера — Планка

$$\frac{\partial\rho(\xi_j/\xi_i)}{\partial t} = B\frac{\partial^2\rho(\xi_j/\xi_i)}{\partial\xi^2}, \qquad (18)$$

где B — коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение параболического типа имеет три решения, одно из которых может быть представлено в виде [1, 2]

$$\rho(\xi_j, t_j/\xi_i, t_i) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{iq(\xi_j - \xi_i) - q^2B(t_j - t_i)\right\}dq, \qquad (19)$$

где q — обобщенная частота.

При $\tau = t_j - t_i \to 0$ из (19) получим одно из определений δ-функции:

$$\lim_{\tau\to 0}\rho(\xi_j/\xi_i) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\right\}dq = \delta(\xi_j - \xi_i). \qquad (20)$$

Поскольку данный результат получен для предельного случая $\tau \to 0$, то не исключено, что δ-функция (20) может соответствовать не только диффузионному марковскому случайному процессу, но и многим другим стационарным и нестационарным случайным процессам. Другими словами, можно было сразу предположить, что δ-функция для ПССП имеет вид (20), не обращаясь к уравнению Фоккера — Планка (18).

Подставив полученную δ-функцию (20) в выражение (17), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_{ik})\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{iq(\xi_{jk}-\xi_{ik})\}dq\right]\times \times\varphi(\xi_{jk})d\xi_{ik}d\xi_{jk}=1. \quad (21)$$

Поменяв в (21) порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_{ik})\exp\{-iq\xi_{ik}\}d\xi_{ik}\times \times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_{jk})\exp\{iq\xi_{jk}\}d\xi_{jk}\right]dq=1. \quad (22)$$

Учтем, что согласно выражению (13) для ПССП и ССП выполняется условие $\varphi(\xi_{ik}) = \varphi(\xi_{jk})$. Поэтому выражение (22) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(q)\,\varphi^*(q)dq=1, \quad (23)$$

где

$$\varphi(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_k)\exp\{-iq\xi_k\}d\xi_k; \quad (24)$$

$$\varphi^*(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_k)\exp\{iq\xi_k\}d\xi_k. \quad (25)$$

Подынтегральное выражение $\varphi(q)\varphi^*(q)$ в интеграле (23) отвечает всем требованиям ФПРВ $\rho(q)$ обобщенной частоты q:

$$\rho(q)=\varphi(q)\varphi^*(q)=|\varphi(q)|^2. \quad (26)$$

Выясним, что представляет собой величина q. Особенности рассматриваемого случайного процесса накладывают на обобщенную частоту q следующие ограничения:

- q должна быть случайной величиной;
- величина q должна характеризовать случайный процесс в исследуемом интервале $\tau = t_j - t_i$ (рис. 1) при $\tau \to 0$;
- величина q должна принадлежать множеству действительных чисел ($q \in R'$), имеющему мощность континуума, то есть q должна иметь возможность принимать любое значение из диапазона]−∞, ∞[.

Всем этим требованиям удовлетворяет любая из следующих случайных величин, связанных с ПССП (или ССП) на исследуемом временном интервале τ:

$$\xi_i'=\frac{\partial\xi_k}{\partial t},\ \xi_i''=\frac{\partial^2\xi_k}{\partial t},\ ...,\ \xi_i^{(n)}=\frac{\partial^n\xi_i}{\partial t^n}. \quad (27)$$

Однако эти случайные величины характеризуют ПССП (или ССП) не в равной степени. Рассмотрим одну из реализаций исследуемого процесса. Функция $\xi(t)$ (рис. 1) в интервале $\tau = t_j - t_i$ при $\tau < \tau_{кор}$ (где $\tau_{кор}$ — интервал автокорреляции случайного процесса) может быть разложена в ряд Тейлора — Маклорена:

$$\xi(t_j)=\xi(t_i)+\xi'(t_j)\tau+\frac{\xi''(t_i)}{2}\tau^2+\ ...\ +\frac{\xi^{(n)}(t_i)}{n!}\tau^n+... \quad (28)$$

Запишем выражение (28) в следующем виде:

$$\frac{\xi_j-\xi_i}{\tau}=\xi_i'+\frac{\xi_i''}{2!}\tau+\ ...\ +\frac{\xi_i^{(n)}\tau^{n-1}}{n!}+... \quad (29)$$

где $\xi(t_i) = \xi_i$, $\xi(t_j) = \xi_j$.

Как и в (20) устремим τ к нулю, при этом выражение (29) сводится к тождеству:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\xi_j-\xi_i}{\tau}=\xi_k', \quad (30)$$

где $\xi_k' = \xi(t_k)$ (рис. 1).

> Предложенное решение проблемы… позволяет рекомендовать дополнительные методы исследования свойства и характеристик случайных процессов, например шероховатых поверхностей

Компетентность / Competency (Russia) 4/2022
DOI: 10.24412/1993-8780-2022-4-16-21

Таким образом, единственной случайной величиной, удовлетворяющей всем перечисленным требованиям на исследуемом временном интервале

$$\left[t_i = \frac{t_k - \tau}{2};\ t_j = \frac{t_k + \tau}{2}\right],\ \text{при}\ \tau \to 0,$$

является первая производная исходного случайного процесса $\xi'_k = \xi'(t_k)$ в сечении t_k. Следовательно, остается положить, что случайная величина q в выражениях (23)–(26) линейно связана только с ξ'_k, то есть

$$q = \frac{\xi'_k}{\eta}, \tag{31}$$

где $1/\eta$ — размерный коэффициент пропорциональности.

Приведем дополнительный аргумент в пользу обоснования справедливости выражения (31). Каждой экспоненте, например из интеграла (24), соответствует гармоническая функция с частотой q

$$\exp\{-iq\xi(t)\} \to \xi_k(t) = A\sin(qt), \tag{32}$$

и это одна из гармонических составляющих случайного процесса ξ(t). При этом каждой частоте q в свою очередь соответствует тангенс угла наклона касательной линии к гармонической функции с данной частотой (рис. 2), то есть $q \sim \mathrm{tg}\alpha = \xi'(t)$.

Действительно, продифференцировав гармоническую функцию (32), получим связь $\xi'_k(t) = qA\cos(qt)$, отсюда

$$q = \lim_{t\to 0} \frac{\xi'_k}{A\cos(qt)} = \frac{\xi'_k}{A}. \tag{33}$$

При $A = \eta$, выражения (31) и (33) совпадают, что еще раз подтверждает утверждение, что обобщенная частота q линейно связана с производной исследуемого случайного процесса ξ′(t).

Подставляя (31) в выражения (23–26), получим следующую искомую процедуру получения ФПРВ $\rho(\xi', t)$ производной ПССП (или ССП) $\xi(t)$ в любом сечении t_k при известной одномерной ФПРВ $\rho(\xi, t)$ того же случайного процесса в том же его сечении:

1. Заданная одномерная ФПРВ $\rho(\xi, t)$ представляется в виде произведения двух ПАВ $\varphi(\xi, t)$:

$$\rho(\xi, t) = \varphi(\xi, t)\varphi(\xi, t). \tag{34}$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(\xi', t) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t)\exp\left\{\frac{i\xi'\xi}{\eta}\right\} d\xi; \tag{35}$$

$$\varphi^*(\xi', t) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t)\exp\left\{-\frac{i\xi'\xi}{\eta}\right\} d\xi. \tag{36}$$

3. Окончательно для произвольного сечения ПССП (или ССП) получим искомую ФПРВ производной

$$\rho(\xi', t) = \varphi(\xi', t)\,\varphi^*(\xi', t) = \\ = \left|\varphi(\xi', t)\right|^2. \tag{37}$$

Еще раз отметим, что процедура (34–37) может быть применима к любым дифференцируемым стационарным и псевдостационарным случайным процессам, для которых при $\tau \to 0$ δ-функция принимает вид (20).

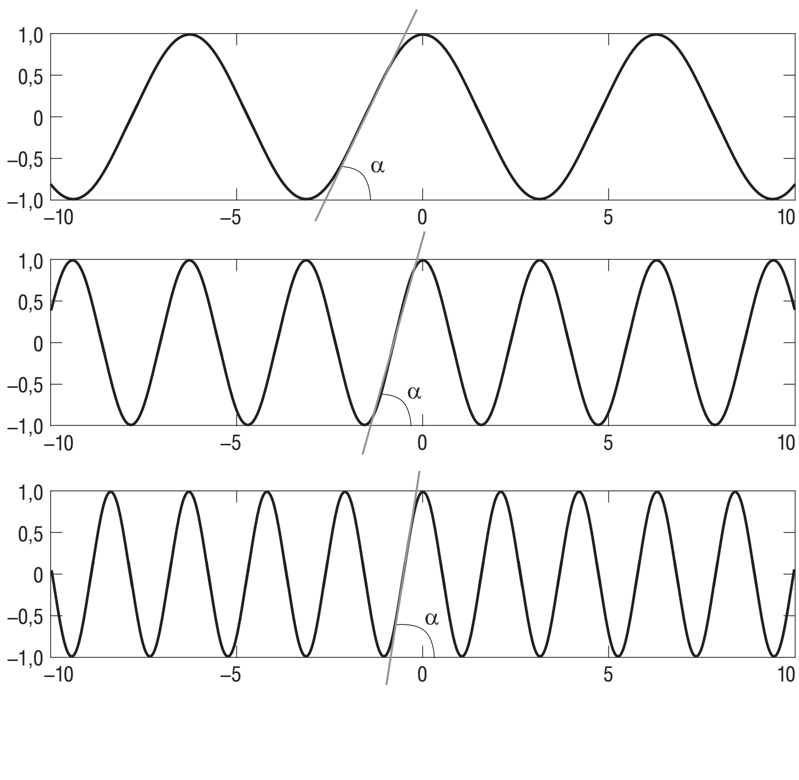


Рис. 2. Чем больше частота гармонической функции, тем больше угол α между касательной к этой функции и осью t
[The greater the frequency of the harmonic function, the greater the angle α between the tangent to this function and the axis t]

Для выяснения физического смысла коэффициента η воспользуемся сравнением с известными результатами. Данный подход небезупречен с точки зрения математической строгости, но позволяет достаточно эффективно получить практически значимый результат. ■

Продолжение следует

Статья поступила в редакцию 20.02.2022

Список литературы

1. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч.1. — М.: Наука, 1976.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
3. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. — М.: Высшая школа, 1963.
4. Batanov-Gaukhman M. The Diffraction of Microparticles on Single-layer and Multi-layer Statistically Uneven Surfaces. — 2020 [v2] arXiv:2007.13527.
5. Batanov-Gaukhman M. Stochastic Model of Microparticle Scattering On a Crystal Avances en Ciencias e Ingeniería (ISSN: 0718-8706). — Vol. 12. — № 3; https://www.executivebs.org/publishing.cl/ avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-12-nro-3-ano-2021-articulo-4/.

Kompetentnost' / Competency (Russia) 4/2022
ISSN 1993-8780. DOI: 10.24412/1993-8780-2022-4-16-21

Distribution Density of the Random Process Derivative Probability

M.S. Batanov[1], Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI (NRU), PhD
V.P. Monakhova[2], Institute N 2 Aircraft, Rocket Engines and Power Plants of MAI (NRU), PhD
M.O. Romashova[3], MAI (NRU), 79651082719@ya.ru

[1] Associate Professor of Department N 207, Moscow, Russia
[2] Director, Moscow, Russia
[3] Assistant of Department N 207, Moscow, Russia

Citation: Batanov M.S., Monakhova V.P., Romashova M.O. Distribution Density of the Random Process Derivative Probability, *Kompetentnost' / Competency (Russia)*, 2022, no. 4, pp. 16–21. DOI: 10.24412/1993-8780-2022-4-16-21

key words

stationary differentiable random process, derivative of random process, Planck's constant, surface roughness

The article proposes a method (procedure) for obtaining the probability distribution density function (PDDF) of the derivative of a differentiable stationary (or pseudo-stationary) random process with a known one-dimensional PDDF of this process. We have shown that the proposed procedure, up to a proportionality factor, coincides with the quantum mechanical transition from the coordinate to the momentum representation of the state of an elementary particle. An assumption that the ratio of the reduced Planck's constant to the mass of an elementary particle can be expressed through the ratio of the averaged characteristics of a stationary random process in which this particle participates was made based on a detailed analysis of the differentiable random process properties.

At the same time, the procedure proposed in the article is suitable for obtaining the PDDF of the derivative of a differentiable stationary (or pseudo-stationary) random process of any scale. We believe that the results obtained in this article are applicable in various branches of statistical physics, in particular, in the study of the properties of rough surfaces.

References

1. Rytov S.M. Vvedenie v statisticheskuyu radiofiziku. Ch.1 [Introduction to statistical radiophysics. Part 1], Moscow, *Nauka*, 1976, 494 P.
2. Tikhonov V.I. Statisticheskaya radiotekhnika [Statistical radiotechnics], Moscow, *Radio i svyaz'*, 1982, 622 P.
3. Blokhintsev D.I. Osnovy kvantovoy mekhaniki [Fundamentals of quantum mechanics], Moscow, *Vysshaya shkola*, 1963, 620 P.
4. Batanov-Gaukhman M. The Diffraction of Microparticles on Single-layer and Multi-layer Statistically Uneven Surfaces, (2020) [v2] arXiv:2007.13527.
5. Batanov-Gaukhman M. Stochastic Model of Microparticle Scattering On a Crystal Avances en Ciencias e Ingeniería (ISSN: 0718-8706), vol. 12, no. 3; https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-12-nro-3-ano-2021-articulo-4/.